

Referat metodic-științific

*„Aspecte științifice și metodice privind
predarea unității de învățare Cercul”
(conform programei școlare pentru clasa a VII-a)”*

π

Scurt istoric al cercului

Geometria reprezintă ramura matematicii care se ocupă cu studiul relațiilor spațiale. Este una dintre cele două ramuri ale matematicii moderne, cealaltă fiind studiul numerelor.

Începuturile Geometriei

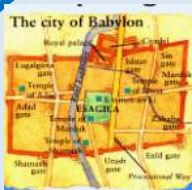
Cele mai vechi urme ale geometriei
• 3000 î.e.n.

Babylon

- Versiunile Teoremei lui Pitagora
- Tabel de trigonometrie

Egiptul Antic

- Volumul piramidei cu baza patrat



Geometria Babiloniană

Teorema lui Pitagora – Babilonienii aveau tăblițe pur aritmetice referitoare la tripletele de numere pitagoreice
Arii – pentru suprafața pătratului, dreptunghiului, triunghiului dreptunghic

Cercul - cunoșteau o valoare aproximativă a lui
 $\pi = 3 + 1/8$

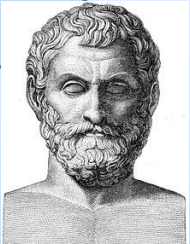


Geometria Egiptului antic

Arii – pentru suprafața triunghiului oarecare, pătratului, trapezului
 Pentru **Suprafața cercului** - cunoșteau o formulă:
 Aria cercului $\approx [(\text{Diametrul}) \times 8/9]^2$
 Construirea celebrelor piramide
volumul acestora

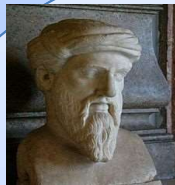
Geometria Greacă

- Geometria atinge un grad înalt de dezvoltare
- extind studiul geometric și la figuri mai complicate
- introduc **demonstrația logică** în rezolvarea problemelor.
- Sistemul axiomatic** introdus de greci este în esență valabil și



**Thales
din Milet**

- considerat părintele științelor
- este primul căruia i se atribuie utilizarea metodei deducției



Pitagora

- a demonstrat teorema care astăzi îi poartă numele
- a obținut o serie de rezultate în domeniul geometriei: lungimile "incomensurabile" și numerele iraționale.



Euclid

- realizează o revoluție în gândirea geometrică și științifică în general: abordarea logică și riguroasă.
- Scrie **Elementele**, în care pune bazele aritmeticii și ale geometriei plane și spațiale.



Platon

- La porțile uneia din școlile sale scria:
"Să nu intre aici cine nu știe geometrie".
- Susține că la realizarea figurilor geometrice trebuie utilizate doar rigla și compasul.



Arhimede

- Volumului sferei
- centrul de greutate al triunghiului
- spirala lui Arhimede
- a introdus un sistem de coordonate .

Geometria Modernă

René Descartes și Pierre Fermat

-considerați creatorii geometriei analitice.

Isaac Newton și Gottfried Wilhelm von Leibniz

- aplicații ale calculului diferențial și integral la studiul curbelor, suprafețelor și al corpurilor cu forme complexe

Adrien-Marie Legendre

-teoremele fundamentale de geometrie absolută

David Hestenes

- pune bazele algebrei geometrice

Cercul

Doar dacă zăbovim o clipă și încercăm să ascultăm,
îl auzim pe Proclus comentând “Elementele” lui Euclid:...

”Cercul este prima, cea mai simplă și cea mai perfectă figură”...

COMPETENȚE GENERALE

π

1. *Identificarea unor date și relații matematice și corelarea lor în funcție de contextul în care au fost definite*
2. *Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunțuri matematice*
3. *Utilizarea algoritmilor și a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situații concrete*
4. *Exprimarea caracteristicilor matematice cantitative sau calitative ale unei situații concrete și a algoritmilor de prelucrare a acestora*
5. *Analiza și interpretarea caracteristicilor matematice ale unei situații-problemă*
6. *Modelarea matematică a unor contexte problematice variate, prin integrarea cunoștințelor din diferite domenii*

COMPETENȚE SPECIFICE

1. *Recunoașterea și descrierea elementelor unui cerc într-o configurație geometrică dată*
2. *Calcularea unor lungimi de segmente și a unor măsuri de unghiuri utilizând metode adecvate în configurații geometrice care conțin un cerc*
3. *Utilizarea informațiilor oferite de o configurație geometrică pentru deducerea unor proprietăți ale cercului.*
4. *Exprimarea proprietăților elementelor unui cerc în limbaj matematic*
5. *Deducerea unor proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări geometrice și noțiuni studiate*
6. *Interpretarea informațiilor conținute în probleme practice legate de cerc și de poligoane regulate*

ȘCOALA
Disciplina: **Geometrie**
Unitatea de învățare: **Cercul**
Nr. ore alocate: 8

Clasa: **a VII-a** / 2 ore săpt.
An școlar: 2017- 2018
Prof.

π

Proiectul unității de învățare

Conținutul	Nr. ore	Săpt.	Compe- tențe specifi-ce	Activități de învățare	Resurse	Evaluarea
Cercul: definiție, elemente în cerc; centru, rază, coardă, diametru, arc, unghi la centru.	1	(S10) 23 - 27.04	CG1-8 CG2-8 CG4-8	-Exerciții de identificare a elementelor unui cerc pe configurații date -Exerciții de utilizare a instrumentelor geometrice adecvate pentru a reprezenta configurații geometrice care conțin un cerc	-Manual, culegere -Instrumente geometrice -Fise de lucru - Activitate frontală	Evaluare frontală Explicarea și argumentare a modului de lucru Evaluarea și notarea fișelor de lucru
Măsurarea arcelor, arce congruente. Coarde și arce în cerc. Proprietăți	1	(S10) 23 - 27.04	CG1-8 CG2-8 CG3-8 CG4-8	-Exerciții de identificare a unor proprietăți ale arcelor și coardelor, diametrul perpendicular pe coardă -Calculul unor lungimi de segmente în cerc -Rezolvarea de probleme în care se utilizează proprietăți ale arcelor, coardelor și diametrul perpendicular pe coardă	-Manual, culegere -Instrumente geometrice -Fise de lucru - Activitate frontală	Evaluare frontală Explicarea și argumentare a modului de lucru Evaluarea și notarea fișelor de lucru

Unghi înscris în cerc,	1	(S11) 30.04-4.05	CG1-8 CG3-8 CG4-8	-Calcularea unor măsuri de unghiuri și de arce de cerc -Construcții de arce congruente utilizând unghiuri la centru	- Manual, culegere - Instrumente geometrice - Fișe de lucru	Evaluare frontală Explicarea și argumentarea modului de lucru
Triunghi înscris în cerc	1	(S11) 30.04-4.05	CG1-8 CG2-8 CG4-8 CG3-8	-Calculul unor lungimi de segmente în cerc -Exerciții de calculare a ariei triunghiului oarecare în raport cu raza cercului circumscris	- Culegere -Instrumente geometrice -Fise de lucru	Evaluarea și notarea fișelor de lucru
Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc; tangente dintr-un punct exterior la cerc;	1	(S12) 7 - 11.05	CG1-8 CG3-8 CG5-8	-Identificarea poziției unei drepte față de un cerc -Rezolvarea unor probleme folosind proprietățile tangentelor duse dintr-un punct exterior la un cerc -Poziționarea unei drepte față de un cerc în raport cu numărul de puncte de intersecție dintre dreaptă și cerc	- Manual, culegere - Instrumente geometrice - Fișe de lucru - Activitate frontală și individuală	Evaluare frontală Explicarea și argumentarea modului de lucru Evaluarea și notarea fișelor de lucru
Triunghi circumscris unui cerc	1	(S12) 7 - 11.05	CG1-8 CG2-8 CG3-8 CG4-8 CG5-8	-Evidențierea concurenței bisectoarelor unui triunghi circumscris unui cerc -Exerciții de determinare a perimetrului triunghiului circumscris unui cerc -Exerciții de calculare a ariei triunghiului oarecare în raport cu raza cercului înscris	- Manual, culegere - Instrumente geometrice - Fișe de lucru - Activitate frontală și individuală	

Recapitulare și sistematizare	1	(S13) 14 – 18.05		Sistematizarea noțiunilor importante Rezolvare de probleme	Conversația Culegere Fișă de lucru Activitatea frontală și individuală	Evaluare frontală Evaluarea și notarea fișelor de lucru
Test de evaluare	1	(S13) 14 – 18.05				Evaluare sumativă

*Aspecte științifice
privind predarea unității de învățare
„Cercul”*

Cercul: definiție, elemente în cerc; centru, rază, coardă, diametru, arc, unghi la centru.

π

Fie în plan, un punct O și un număr pozitiv r .

Definiție: Cercul cu centrul în O și de rază r este mulțimea tuturor punctelor din plan situate la distanța r față de O . Se notează $C(O,r)$.

Elemente:

○ Dacă A este un punct al cercului, distanța dintre punctul A și O este **raza cercului**.

○ Dacă A și B sunt două puncte ale unui cerc, segmentul $[AB]$ se numește **coardă**.

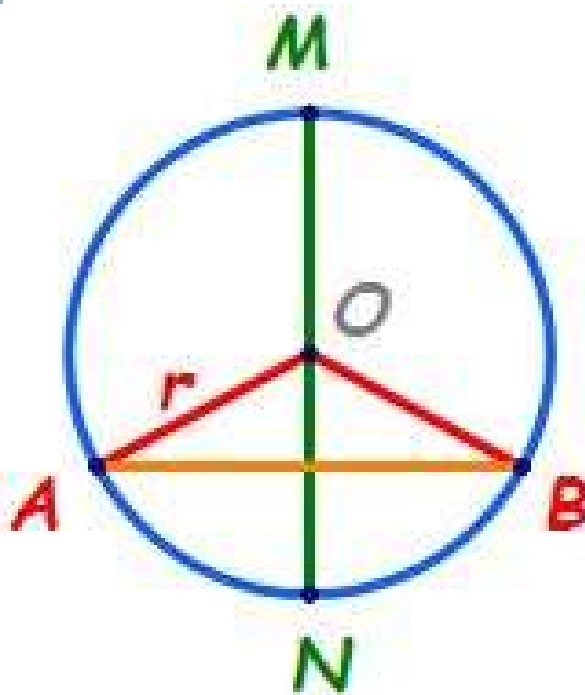
○ O coardă $[MN]$, ce conține centrul cercului se numește **diametru**.

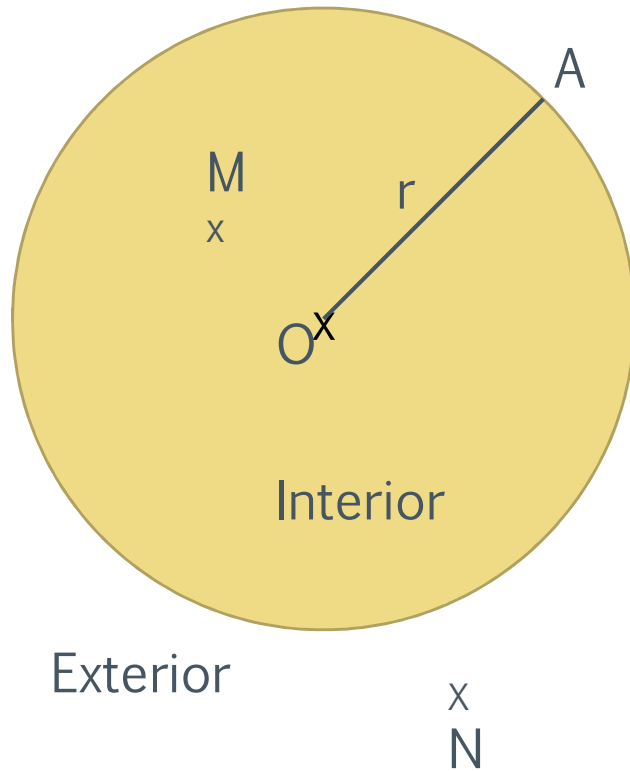
Lungimea diametrului: $d = 2r$

○ Capetele diametrului $[MN]$ se numesc puncte diametral opuse – M, N

○ Cercurile care au raze egale se numesc **cercuri congruente**.

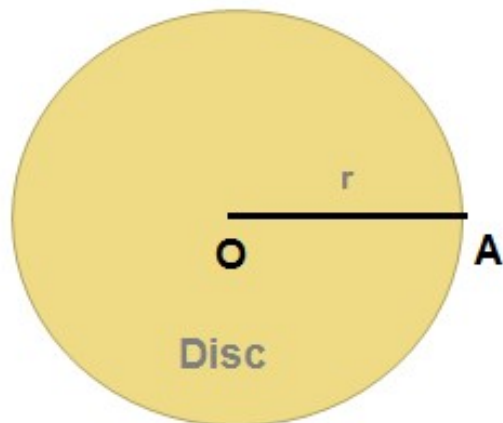
○ Două cercuri care au același centru și aceeași rază, coincid.





○ Fiind dat cercul $C(O, r)$, mulțimea punctelor M din plan pentru care $OM < r$ se numește **interiorul** cercului și se notează: $\text{Int}C(O, r)$.

○ Mulțimea punctelor N din plan pentru care $ON > r$, se numește **exteriorul** cercului și se notează: $\text{Ext}C(O, r)$.

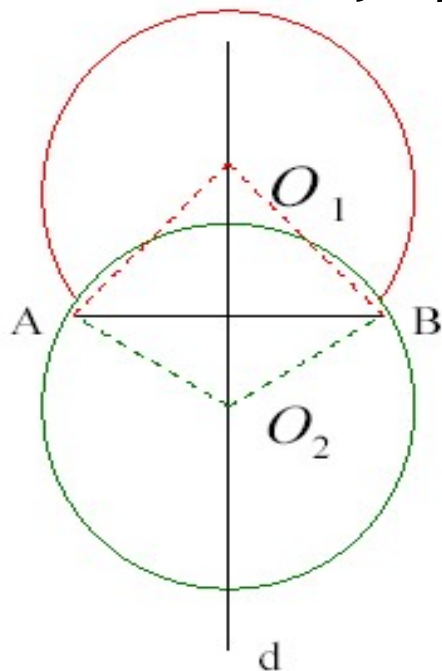


○ Se numește **disc** de centru O și raza r , $r > 0$, mulțimea punctelor cercului reunită cu interiorul cercului și se notează: $D(O, r)$.

$$D(O, r) = C(O, r) \cup \text{Int}C(O, r).$$

PROPOZIȚII:

1. Fiind date două puncte distincte A și B, există o infinitate de cercuri ce conțin punctele A și B .



Demonstrație:

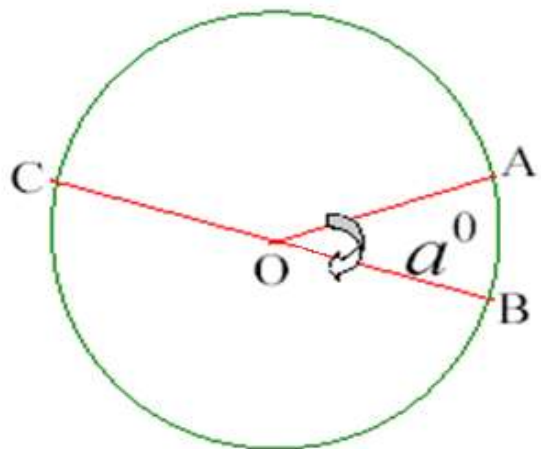
Fie d mediatoarea segmentului $[AB]$.

Punctele mediatoarei d au proprietatea că sunt egal depărtate de capetele segmentului $[AB]$.

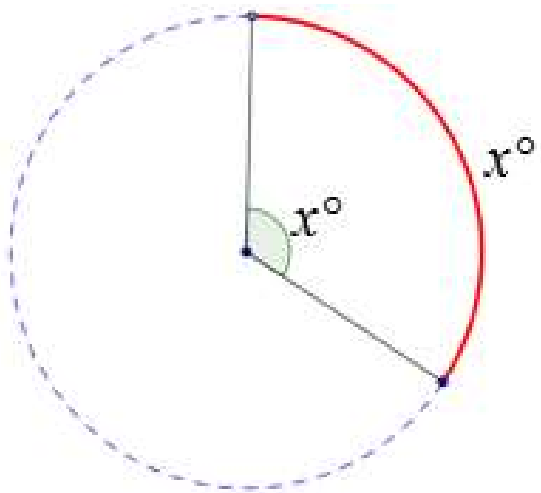
Atunci orice cerc care are centrul pe mediatoarea segmentului $[AB]$ conține punctele A și B.

2. Oricare trei puncte distincte ale unui cerc sunt necoliniare.
3. Prin trei puncte necoliniare trece un singur cerc.
4. Dacă A, B, C sunt trei puncte distincte ale unui cerc, atunci centrul cercului se află la intersecția mediatoarelor triunghiului ABC.
5. Dacă două cercuri au trei puncte distincte comune, atunci ele coincid.

Coarde și arce în cerc. Proprietăți



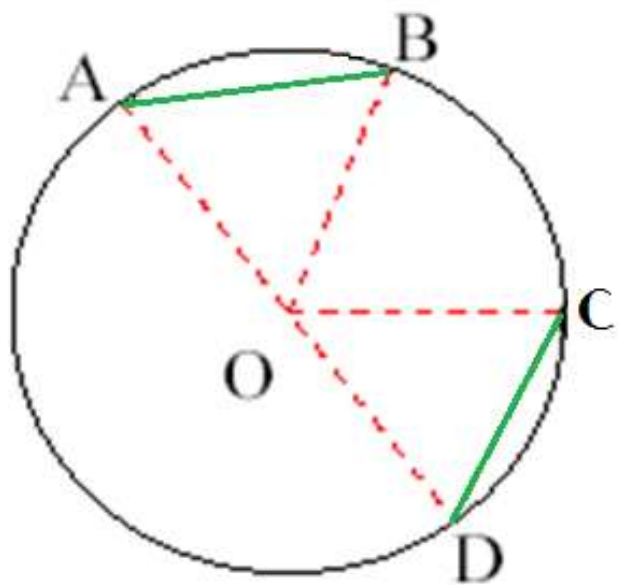
- Un unghi care are vârful în centrul cercului se numește **unghi la centru**.
- Multimea punctelor de pe cerc situate în interiorul unghiului $\angle AOB$ reunite cu A și B se numește **arc mic** și se notează: $\widehat{AB}$
- Multimea punctelor de pe cerc situate în exteriorul unghiului $\angle AOB$, reunite cu A și B se numește **arc mare** și se notează: $\widehat{ACB}$, unde $C \in \text{Int } AOB$.
- Punctele A și B se numesc **capetele arcelor**.
- Dacă B și C sunt capetele unui diametru, arcul $\widehat{BC}$ se numește **semicerc**.



- **Măsura arcului mic** este egală cu măsura unghiului la centru x° ;
- **Măsura arcului mare** este egală cu $360^\circ - x^\circ$;
- **Măsura unui semicerc** este 180° .
- Două arce sunt **congruente** dacă au aceeași măsură.

TEOREMA 1:

In același cerc sau în cercuri congruente, dacă două arce sunt congruente, atunci coardele corespunzătoare sunt congruente.



Demonstrație:

Se demonstrează:

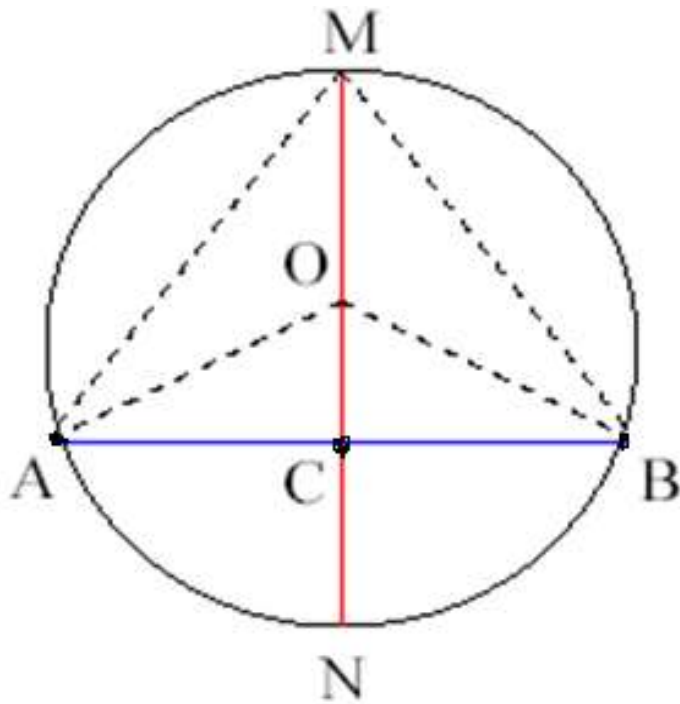
- congruența unghiurilor $\angle AOB$ și $\angle COD$
 - congruența triunghiurilor $\triangle AOB$ și $\triangle COD$ (Cazul L.U.L.)
- de unde rezultă că și coardele sunt egale.

Reciproca T1: (se demonstrează tot prin congruența triunghiurilor)

La coarde congruente corespund arce mici congruente (în același cerc sau în cercuri congruente).

TEOREMA 2:

Dacă A și B sunt două puncte distincte ale unui cerc, atunci diametrul perpendicular pe coarda AB împarte coarda și arcele corespunzătoare în două părți congruente.



Demonstrație:

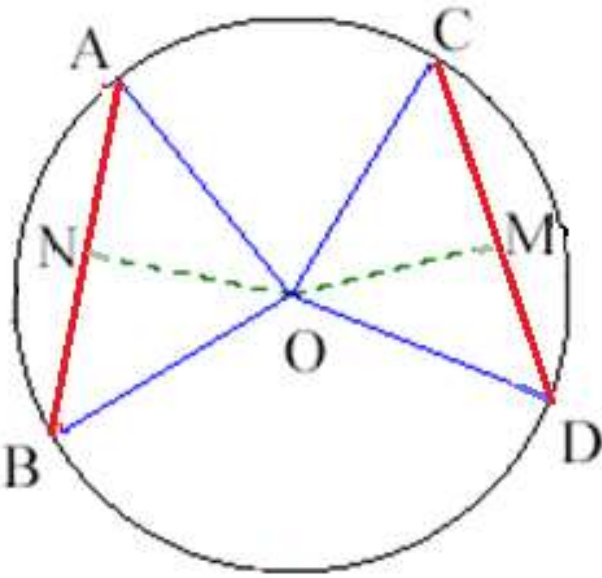
Diametrul $[MN]$ este perpendicular pe coarda $[AB]$. Triunghiul $\triangle AOB$ este isoscel, $[OA]$ și $[OB]$ fiind raze. $OC \subset MN$, deci este înălțime în triunghiul $\triangle AOB$ isoscel. Rezultă că OC este și mediană și bisectoare, deci $[CB] \equiv [AC]$; $\angle COB \equiv \angle AOC$ de unde rezultă că și arcele sunt egale.

TEOREMA 3:

Dacă două coarde ale unui cerc sunt congruente, atunci distanțele de la centru la coarde sunt egale (în același cerc sau în cercuri congruente).

Demonstrație:

Triunghiurile $\triangle AOB \equiv \triangle DOC$ având toate laturile congruente, rezultă că și înălțimile $[ON]$, $[OM]$ sunt congruente.



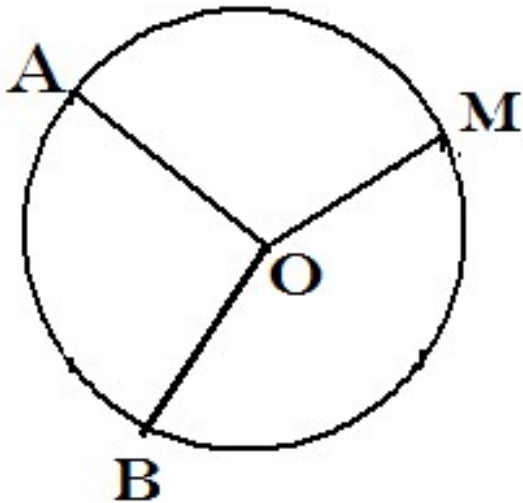
Reciproca T₃:

Coardele egal depărtate față de centru sunt congruente (în același cerc sau în cercuri congruente).

TEOREMA 4.

Dacă A și B sunt două puncte distincte ale unui cerc și punctul M aparține arcului determinat de ele, atunci:

$$m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{AM}) + m(\widehat{MB})$$



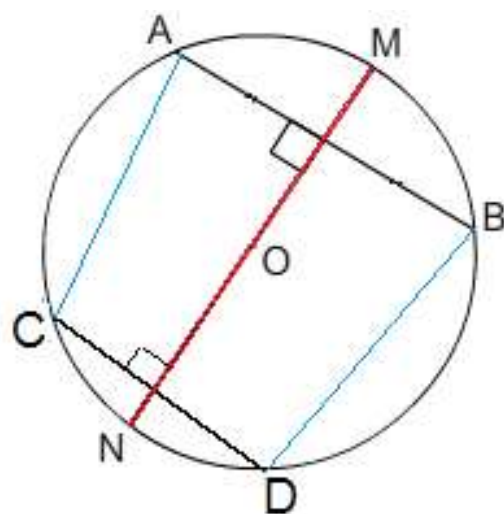
Demonstrație:

Se demonstrează folosind suma unghiurilor la centru corespunzătoare arcelor.

TEOREMA 5:

Arcele cuprinse între două coarde paralele ale unui cerc sunt congruente.

Demonstrație:



Fie $[AB]$ și $[CD]$ două coarde paralele ale cercului, iar punctele A și C sunt situate de aceeași parte a diametrului perpendicular pe coarde .

MN este diametrul perpendicular pe coardele $[AB]$ și $[CD]$, deci M este mijlocul arcului AB , iar N este mijlocul arcului CD . De aici rezultă că arcele AC și BD sunt congruente ca fiind diferențe de arce congruente.

Arcele fiind congruente și coardele sunt congruente.

Unghi înscris în cerc

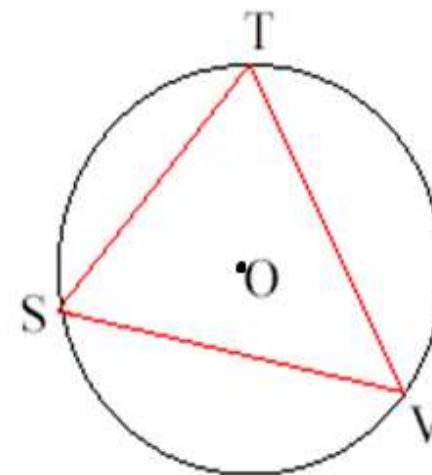
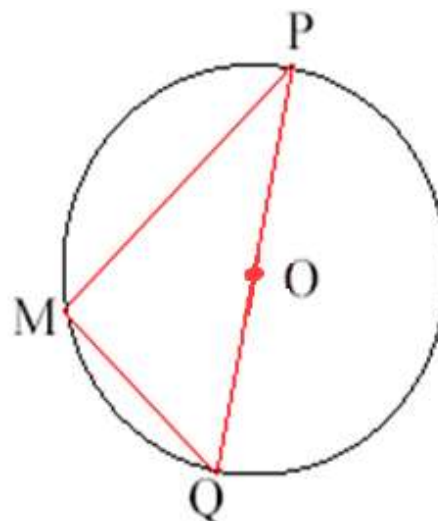
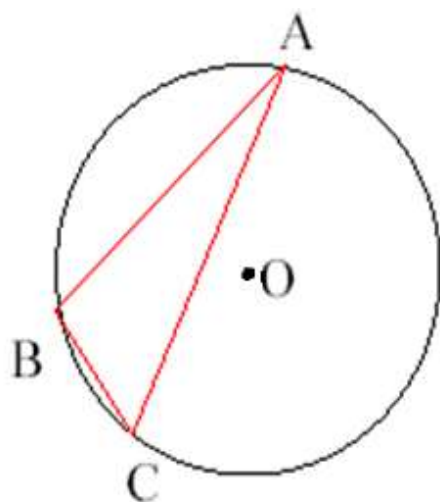
DEFINIȚIE

Unghiul $\angle BAC$ se numește **unghi înscris** în cercul $C(O, r)$ dacă A , B și C aparțin cercului $C(O, r)$.

Triunghiul $\triangle ABC$ **este înscris în cerc** dacă vârfurile sale aparțin cercului.

Unghiurile $\angle BAC$, $\angle MPQ$ și $\angle STV$ sunt unghiuri înscrise în cerc.

Arcele mici BC , MQ , respectiv SV sunt **arce cuprinse** între laturile unghiurilor înscrise.



TEOREMA :

Măsura unui unghi înscris în cerc este jumătate din măsura arcului cuprins între laturile sale.

Demonstrație:

Fie punctele A, M, B pe cercul de centru O.

1) Fie $O \in [MB]$.

Unghiul $\angle AOB$ exterior triunghiului isoscel OAM, deci

$$m(\angle AOB) = 2m(\angle AMO) \quad (1)$$

Cum $\angle AOB$ unghi la centru, $m(\angle AOB) = m(\text{arc } AB) \quad (2).$

Din (1), (2) rezultă că $m(\angle AMB) = 1/2 \cdot m(\text{arc } AB) \quad (3).$

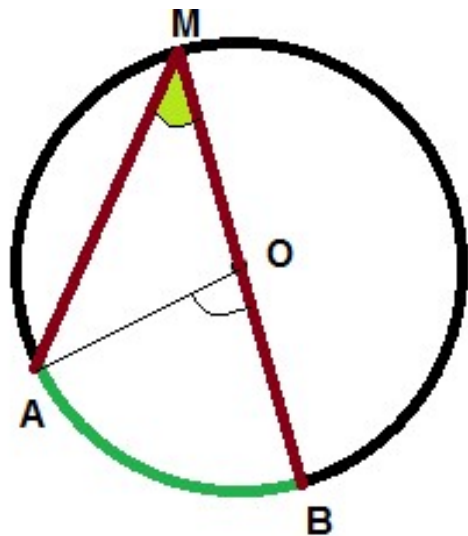


Fig. 1

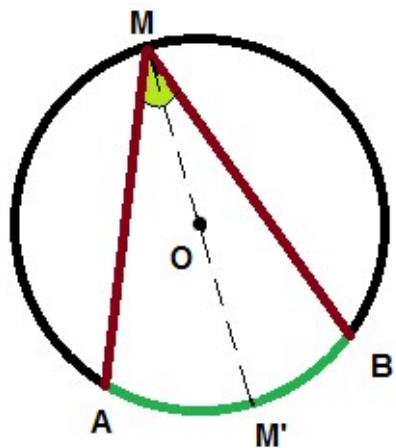


Fig. 2

2) Dacă punctul $O \in \text{Int}(\angle AMB)$ și M' punctul diametral opus lui M , atunci $m(\angle AMB) = m(\angle AMM') + m(\angle M'MB)$ și conform (3), rezultă că $m(\angle AMB) = 1/2 \cdot m(\widehat{AB})$.

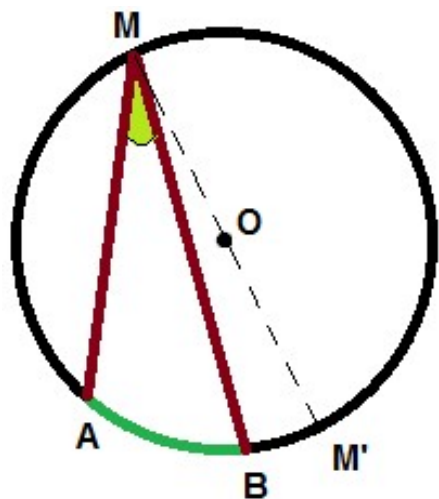
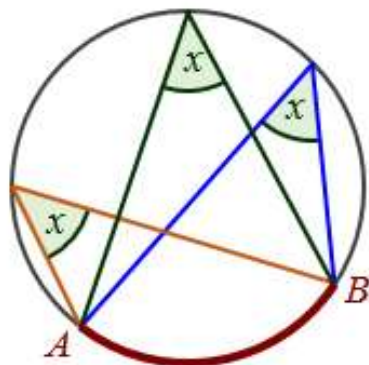


Fig. 3

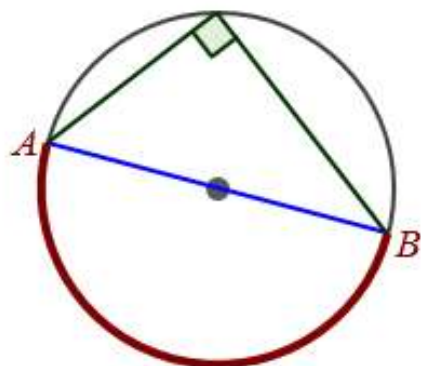
3) Dacă punctul $O \in \text{Ext}(\angle AMB)$

și M' punctul diametral opus lui M , atunci $m(\angle AMB) = m(\angle AMM') - m(\angle M'MB)$ și conform (3) rezultă că $m(\angle AMB) = 1/2 \cdot m(\widehat{AB})$.

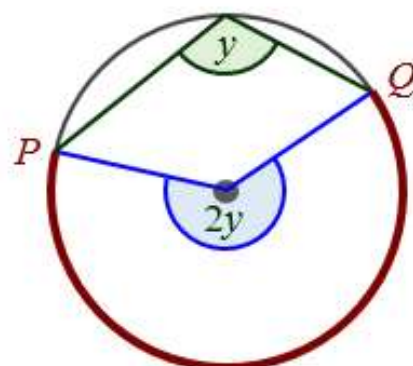
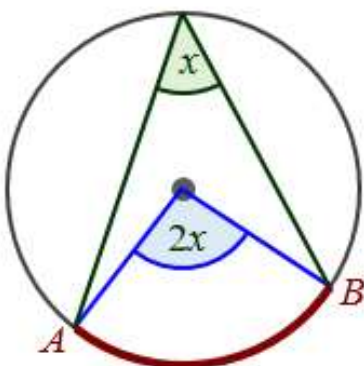
Proprietăți



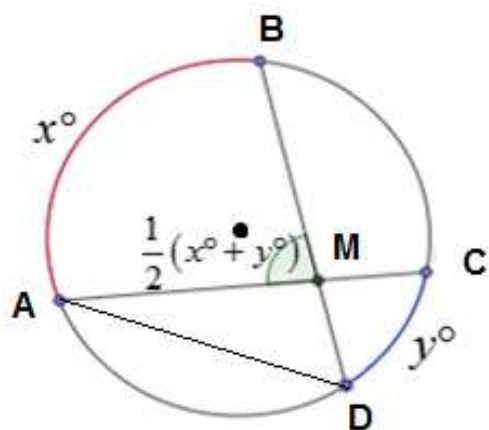
Toate unghiurile cu vârful pe cerc care cuprind același arc, sunt congruente



Unghiul înscris într-un semicerc este drept



Măsura unghiului la centru este egală cu dublul măsurii unghiului înscris în cerc care subîntinde același arc



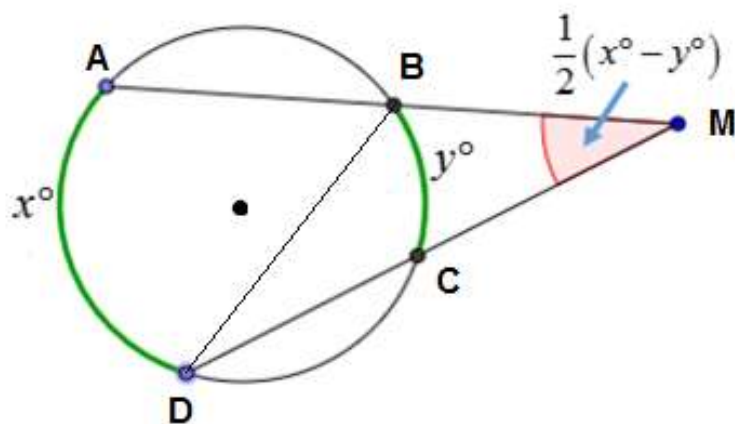
○**Definiție:** Un unghi al cărui vârf este un punct din interiorul cercului, se numește **unghi cu vârful în interiorul cercului**.

○**Teoremă:** Unghiul cu vârful în interiorul cercului are ca măsură jumătate din suma măsurilor arcelor cuprinse între laturile sale.

○**Demonstrație:**

Fie punctele A, B, C, D pe cerc și M în interiorul cercului, atunci unghiul $\angle AMB$ este exterior triunghiului $\triangle AMD$ și $m(\angle AMB) = m(\angle DAM) + m(\angle MDA)$.

Unghiurile $\angle DAM$ și $\angle MDA$ sunt înscrise în cerc și de aici rezultă că $m(\angle AMB) = 1/2 \cdot (m(\text{arc } AB) + m(\text{arc } DC))$.



○**Definiție:** Un unghi al cărui vârf este un punct din exteriorul cercului, se numește **unghi cu vârful în exteriorul cercului.**

○**Teoremă:** Unghiul cu vârful în exteriorul cercului are ca măsură jumătate din diferența măsurilor arcelor cuprinse între laturile sale.

○**Demonstrație:**

Fie punctele A, B, C, D pe cerc și M un punct exterior cercului, atunci unghiul $\angle ABD$ este exterior triunghiului $\triangle BMD$ și $m(\angle AMD) = m(\angle ABD) - m(\angle BDM)$.

Unghiurile $\angle ABD$ și $\angle BDM$ sunt înscrise în cerc și de aici rezultă că $m(\angle AMD) = \frac{1}{2} \cdot (m(\text{arc AD}) - m(\text{arc BC}))$.

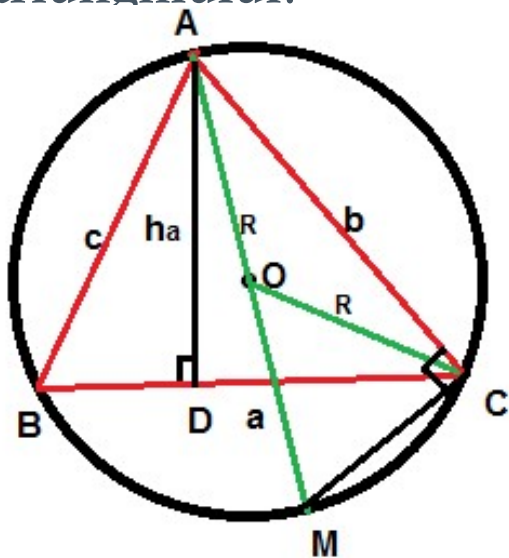
Triunghi înscris în cerc

π

Definiție: Un triunghi cu vârfurile pe cerc se numește **triunghi înscris în cerc**.

În acest caz, spunem că cercul este **circumscriș** triunghiului.

Centrul cercului circumscriș se află la intersecția mediatoarelor laturilor triunghiului.



Raza cercului circumscriș unui triunghi

$$R = \frac{abc}{4 \cdot S}, \quad \text{unde: } S = \mathcal{A}[ABC] \quad (1)$$

Demonstrație:

$$S = \frac{1}{2} \cdot h_a \cdot a \quad (2)$$

$\angle ACM \equiv \angle ADB(90^\circ)$ și $\angle ABD \equiv \angle AMC$ (subîntind arcul AC)

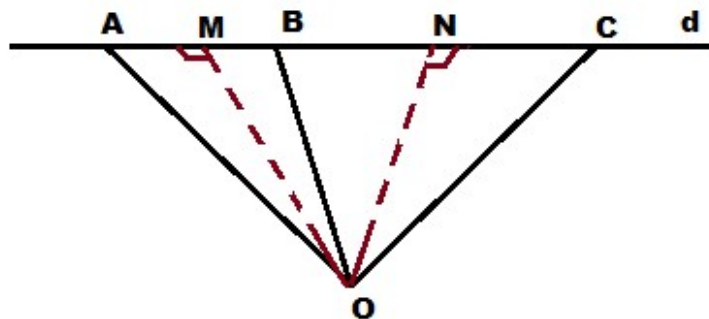
$$\Rightarrow \triangle ACM \sim \triangle ADB \text{ (U.U.)} \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{b}{2R} = \frac{h_a}{c} \quad (3)$$

Din (2) și (3) rezultă (1)

Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc

π

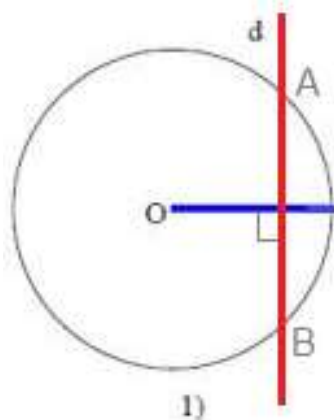
Teoremă: O dreaptă poate avea cu un cerc, fie exact două puncte distincte, fie un singur punct comun, fie niciun punct comun.



1) Se **demonstrează** prin reducere la absurd că o dreaptă nu poate avea mai mult de două puncte distincte în comun cu cercul.

Presupunem că dreapta d ar avea trei puncte A, B, C în comun cu cercul de centru O.

Cum punctele sunt coliniare, în triunghiurile isoscele $\triangle AOB$ și $\triangle BOC$ ar exista două perpendiculare duse din O pe d (înălțimile triunghiurilor : OM și ON), deci absurd, și teorema este demonstrată.



Dreapta secantă față de un cerc este dreapta care are două puncte comune cu cercul: A și B.

Condiția : $d(O, d) < r$

2) Există drepte care au un singur punct în comun cu cercul.

Se demonstrează prin faptul că oricare alt punct al tangentei, este exterior cercului.

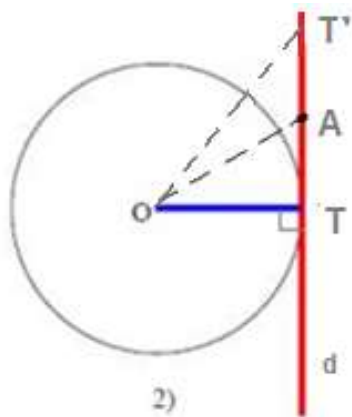
Fie T un punct al cercului de centru O și d perpendiculara în T pe raza OT și $A \in d$, $T \neq A$, atunci în triunghiul $\triangle AOT$ dreptunghic în T , OA ipotenuză, deci $OA > OT = r$. Atunci punctul A este exterior cercului.

Există, deci, **tangente la cerc care sunt perpendiculare pe rază în punctul de tangență.**

Reciproca: Raza este perpendiculară pe tangentă în punctul de tangență.

Se demonstrează prin reducere la absurd.

Presupunem că raza OT nu e perpendiculară pe tangenta d în punctul de tangență T , ar exista o altă perpendiculară (OA) pe tangentă, dusă din centrul cercului. Se demonstrează că, simetricul punctului de tangență T' în raport cu piciorul perpendicularei A construite, se află tot pe cerc ($\triangle AOT \equiv \triangle AOT'$, adică $OT = OT' = r$), deci tangenta ar avea în comun cu cercul două puncte, ceea ce e absurd.



2) **Dreapta tangentă la cerc** este dreapta care are un singur punct comun cu cercul: T .

T se numește punct de tangență

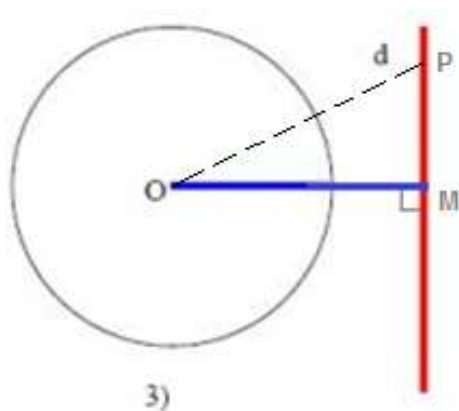
$$d \perp OT$$

$$\text{Condiția : } d(O, d) = r$$

3) Există drepte exterioare cercului.

Se consideră un punct M în exteriorul cercului $C(O, r)$, deci $OM > r$.

Ducem o perpendiculară d pe OM și luăm pe aceasta un punct P , $P \neq M$. Triunghiul OPM dreptunghic în M cu ipotenuza $OP > OM$, deci orice punct al dreptei d este exterior cercului și atunci dreapta d este exterioară cercului.



Dreapta exterioară cercului este dreapta care nu are puncte comune cu cercul.

Condiția : $d(O, d) > r$

TEOREMA 1

Dintr-un punct exterior unui cerc se pot duce două drepte tangente la cerc și numai două.

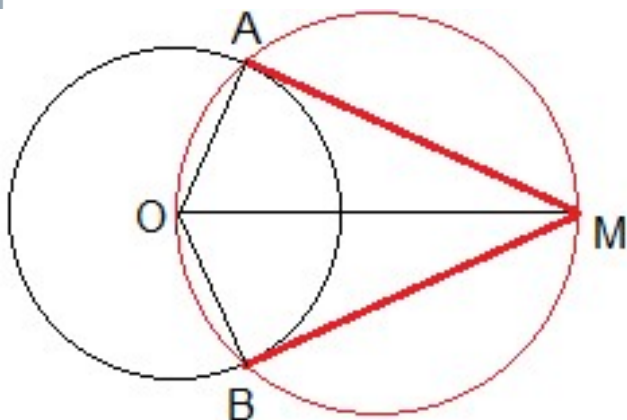
Demonstrație:

Fie M un punct exterior cercului de centru O.

Tangenta din M intersectează cercul de centru O în A, deci $m(\angle MAO) = 90^\circ$.

Ultima condiție exprimă că A este un punct pe cercul de diametru OM.

Acest cerc are un punct în interiorul cercului de centru O și unul exterior acestui cerc, deci cele două cercuri sunt secante, deci MA și MB sunt tangentele căutate.



TEOREMA 2

Fie un punct exterior A unui cerc de centru O și AT și AT' tangentele din A la cerc. Sunt adevărate următoarele afirmații:

- Tangentele AT și AT' sunt congruente,
- [OA bisectoarea unghiului TOT',
- [AO bisectoarea unghiului TAT',
- OA mediatoarea segmentului [TT'].

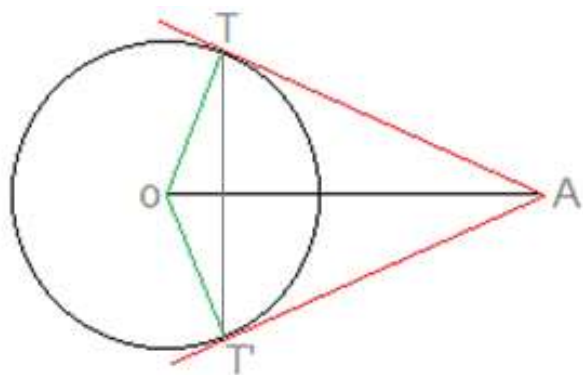
Demonstrație:

Fie AT și AT' tangentele duse din punctul A la cerc.

Triunghiurile $\triangle OAT$ și $\triangle OAT'$ sunt dreptunghice în punctele T, respectiv T', deoarece știm că tangenta este perpendiculară pe rază.

Cele două triunghiuri sunt congruente. De aici rezultă ca AT și AT' sunt congruente.

Celelalte afirmații se demonstrează pe baza congruenței triunghiurilor dreptunghice OTA și OT'A



Triunghi circumscris unui cerc

Definiție: Un triunghi care are laturile tangente la cerc se numește **triunghi circumscris cercului**. În acest caz, spunem că cercul este **înscriș în** triunghi.

Centrul cercului **înscriș** se află la intersecția bisectoarelor unghiurilor triunghiului.

Raza cercului **înscriș** r unui triunghi

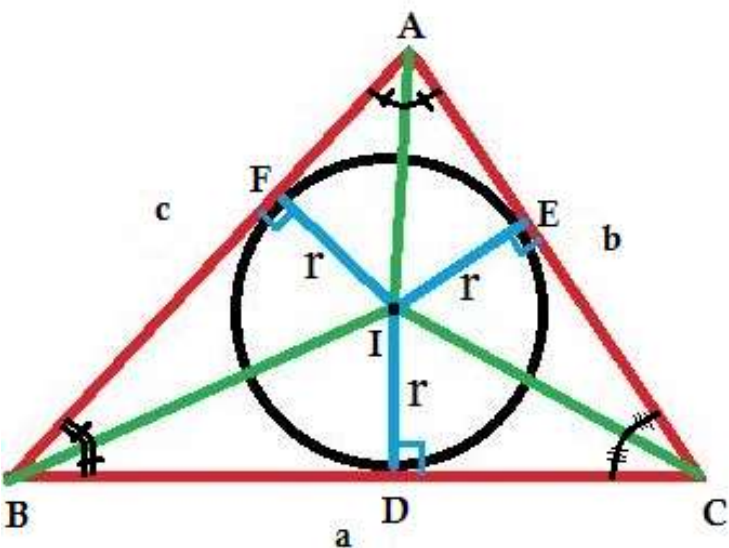
$$r = \frac{S}{p}, \quad \text{unde: } S = \mathcal{A}[ABC] \quad (1)$$

p este semiperimetrul triunghiului ABC,

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[ABC] &= \mathcal{A}[ABI] + \mathcal{A}[BCI] + \mathcal{A}[ACI] = \frac{r \cdot a}{2} + \frac{r \cdot b}{2} + \frac{r \cdot c}{2} \\ &= r \cdot p, \quad \text{de unde rezultă (1)} \end{aligned}$$



Probleme metodice asupra lecțiilor

Construcția cercului

π

Capitolul *Cerc* prin conținutul său aplică cunoștințele anterioare, deci reprezintă o reluare și o ducere mai departe a studiului geometriei.

Elevii au studiat deja bisectoarea unui unghi și mediatoarea unui segment, deci aceste cunoștințe le putem utiliza în definirea cercului.

Îi vom determina pe elevi să înțeleagă că, orice punct al cercului are proprietatea că se află la distanța dată r de O se află pe cercul dat. În plan nu mai există alte puncte decât cele de pe cercul desenat, care să fie la distanța r față de O .

În acest capitol avem două serii de teoreme: teoreme simple, ușor de intuit, de demonstrat, cum sunt cele referitoare la coarde și arce, diametrul perpendicular pe o coardă, congruența coardelor și a distanțelor de la centrul cercului la acestea, poziția dreptei față de cerc, teoreme mai greu de înțeles și intuit în formă generală și completă cum sunt cele referitoare la unghi înscris în cerc,

Avem în plus și o problemă nouă, aceea a determinării cercului.

Enunțul de a construi un cerc este legat în mintea copilului, prin toată experiența lui anterioară, de ideea: am centrul și raza. În prima lecție urmărim ca pe lângă elementele cercului, elevul să înțeleagă **modul "unic" de determinare al cercului**, adică să-și formeze o idee despre locurile geometrice, fără a introduce denumirea. Astfel, elevii vor fi pregătiți pentru a transforma mai târziu raționamente repetate, în metode de rezolvare.

Problema **construcției cercului care trece printr-un punct**, scoate în evidență ideea, că se pot construi de fapt mai multe "cercuri" care trec prin acel punct, care depind de alegerea centrului în plan și a razei.

Construcția cercului care trece prin două puncte este aplicația directă a cunoștințelor despre mediatoare, centrul cercului trebuie să fie situat la aceeași depărtare față de cele două puncte alese, deci pe mediatoare; orice punct al mediatorei este centrul unui cerc care răpunde problemei.

Construcția cercului care trece prin trei puncte este un prilej de a determina elevii să parcurgă raționamentele metodei de construcție prin intersecția locurilor geometrice.

Orice cerc care trece printr-o pereche de puncte are centrul pe mediatoarea segmentului determinat de ele; orice cerc care trece prin altă pereche de puncte (din cele trei date) are centrul pe mediatoarea segmentului respectiv.

Cercul care trece prin prima și prin a doua pereche de puncte are centrul și pe prima mediatoare și pe a doua, adică la intersecția lor.

Problema poate fi folosită pentru a adânci rigoarea raționamentelor elevilor atât prin observație, analiza modului prin care am găsit soluția, cât și prin descoperire.

Ca temă este bine să se dea construcția cercului care trece prin vârfurile unui triunghi, alegând cazuri în care să se vadă că mărimea cercului, poziția lui în plan, depinde de alegerea celor trei puncte.

De exemplu un triunghi $\triangle ABC$ cu laturile: $AB=3\text{cm}$, $AC=5\text{ cm}$ și unghiul A cu măsura de : 1) 70° ; 2) 90° ; 3) 120° ; 4) 150° .

Putem pune și întrebarea ce se întâmplă cu raza cercului când unghiul A crește?

Este deja demonstrat rolul TIC în stimularea interesului și motivației pentru învățare, în creșterea performanțelor școlare ale elevilor.

Astfel, folosind mijloacele TIC li se oferă elevilor posibilitatea de a integra în procesul educațional aceea ”extensie” a lor, calculatorul.

Utilizarea softului Geogebra (sau Utilizarea sistemului educațional informatizat AEL, furnizat de Siveco Romania) pentru realizarea figurilor geometrice poate oferi elevilor o mai bună fixare a conținuturilor acestei lecții.



Basic Tools



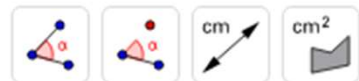
Edit



Construct



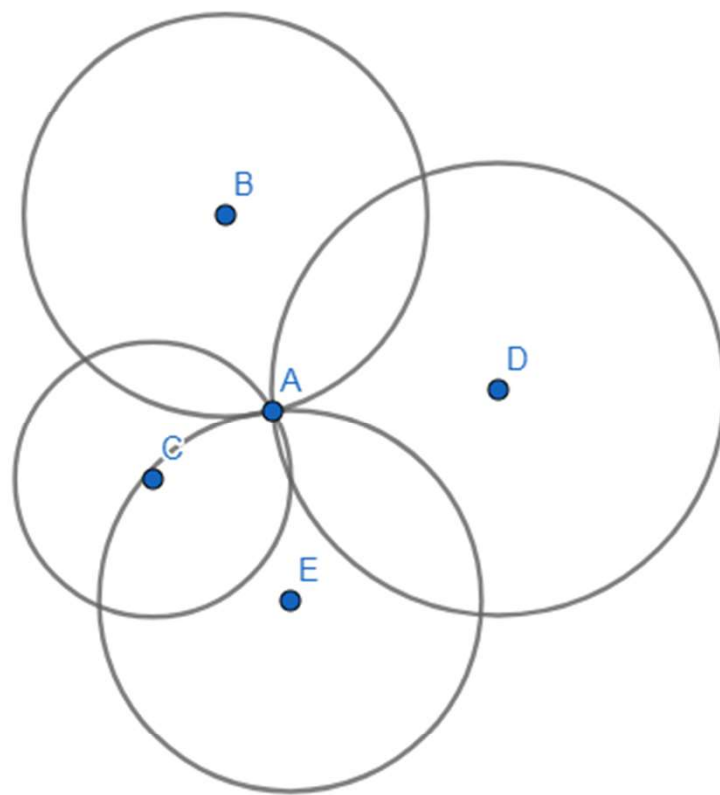
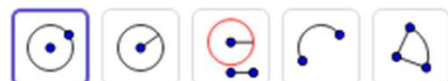
Measure

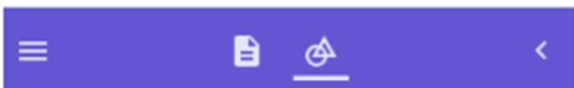


Lines



Circles





Basic Tools



Edit



Construct



Measure



Lines



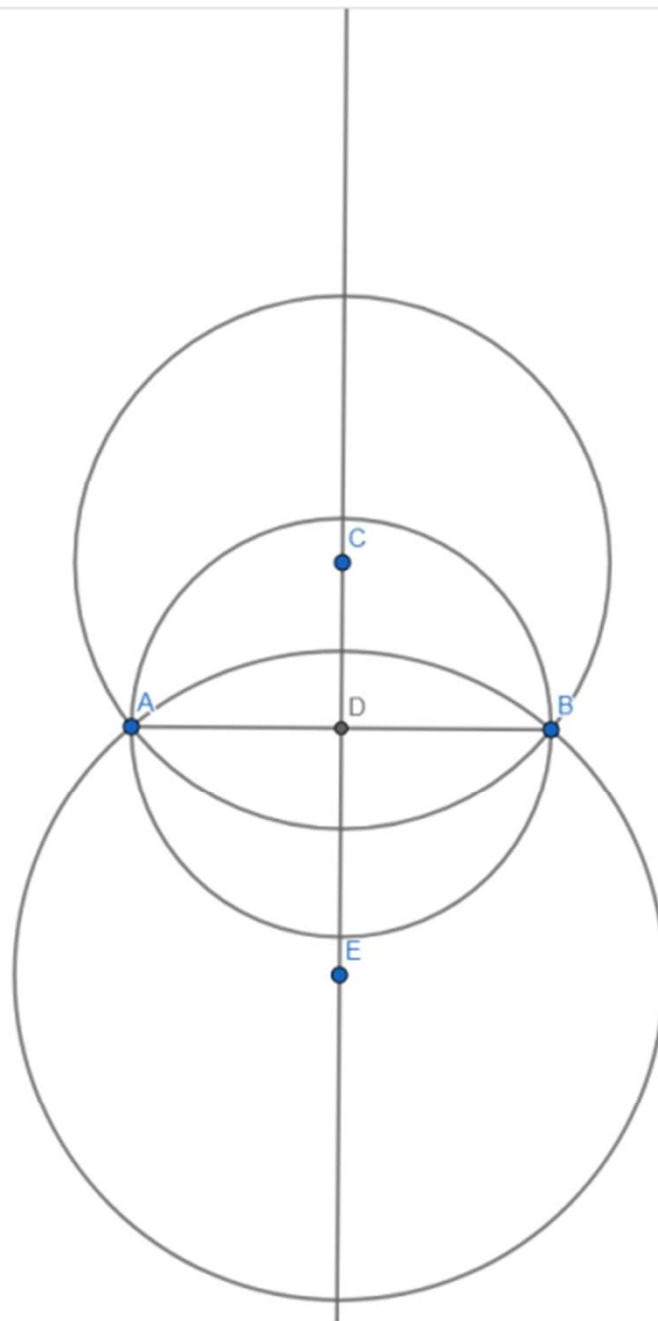
Circles



Polygons



Transform



GeoGebra Geometry interface showing the toolbar and workspace.

Basic Tools

- Selection tool (mouse cursor)
- Point tool (A)
- Line tool
- Line with point tool
- Triangle tool
- Circle tool (highlighted)

Edit

- Reset tool
- AA tool
- Circle tool
- Delete tool

Construct

- Line with point tool
- Line tool
- Line with point tool
- Line with point tool
- Line with point tool
- Line with point tool

Measure

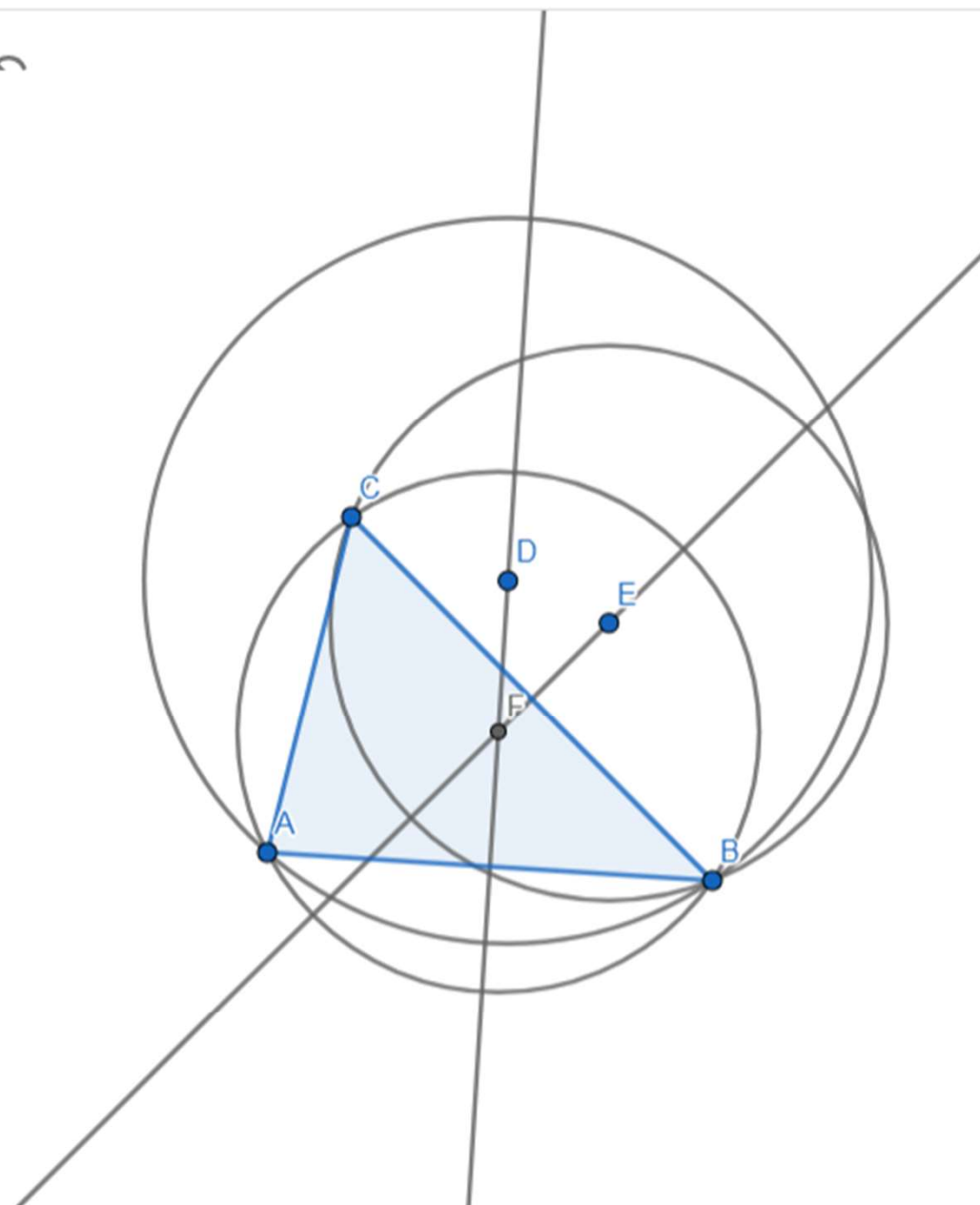
- Angle tool
- Angle tool
- cm tool
- cm² tool

Lines

- Line tool
- Line with point tool
- Line with point tool
- Line with point tool
- Line with point tool

Circles

- Circle tool (highlighted)
- Circle tool
- Circle tool
- Circle tool
- Circle tool



Unghiul înscris în cerc

π

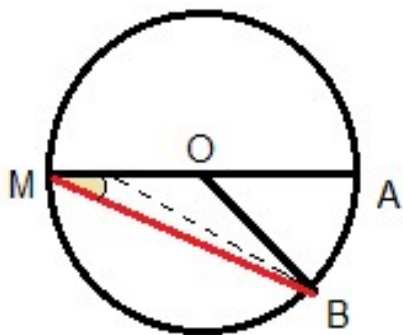
Se urmărește la elevi deprinderea a două aspecte ale lecției:

- unul static – să afle măsura arcului sau a unui unghi cu vârful pe cerc;
- unul dinamic – să descopere că toate unghiurile înscrise care subîntind același arc sunt congruente.

Proiectarea lecției ar trebui să cuprindă tratarea problemei prin subprobleme mai simple, în care un caz particular servește pentru studiul cazului general:

1) Reactualizarea noțiunilor despre: măsura unghiului la centru, unghiul exterior unui triunghi, deducerea faptului că unghiul exterior vârfului unui triunghi isoscel este dublul unghiului de la bază.

2) **Studierea măsurii unghiului $\angle AMB$** față de măsura $\angle AOB$ în cazul în care punctul M se deplasează de la O spre stânga sau spre dreapta, pe diametrul din A .



Urmează apoi, aflarea raportului dintre măsurile unghiurilor, atunci când M este pe cerc și stabilirea proprietății.

3) **Trecerea la cazul general** se face prin utilizarea cazului particular în demonstrație.

4) **Consecințele și aplicațiile** trebuie să urmărească atât caracterul static – aflarea unghiului înscris sau a arcului care subîntinde unghiul cât și pe cel dinamic al lecției – oriunde s-ar mișca punctul M pe arcul AMB , unghiul $\angle AMB$ are aceeași măsură.

Alte consecințe se referă la determinarea măsurii unghiurilor cu vârful în interiorul cercului sau în exteriorul acestuia.

În ceea ce privește demonstrarea teoremelor și problemelor din geometria cercului, trebuie să facem în așa fel încât:

- elevul să ajungă la convingerea că nu poate să culeagă roadele studiilor sale matematice fără eforturi deosebite, că nu este suficient numai să înțeleagă raționamentele ce-i sunt expuse, și să construiască singur, pe baza lor, raționamente noi

- să observe corect care este ipoteza și care este concluzia unei teoreme pe care vrea să o demonstreze

- să înțeleagă că a demonstra o teoremă, înseamnă a trece prin raționament, de la ipoteză la concluzie, că trebuie dedusă concluzia din ipoteză

- să știe că în orice demonstrație se arată că, concluzia are loc în presupunerea că ipoteza este adevărată.

Sarcina principală a predării geometriei este să pună elevii, după ce li se dă un număr minim de definiții – în prezența problemelor, îndemnându-i să descopere teoreme și aplicații, să-i sprijine, să-i călăuzească, atât cât este necesar în această activitate vie și proprie de descoperire.

Tensiunea căutării, emoția aflării, constituie fenomenul psihic fundamental al copilului în fața geometriei.

Mozaicul

π

Mozaicul sau „metoda grupurilor interdependente” este o strategie bazată pe învățarea în echipă. Fiecare elev are o sarcină de studiu în care trebuie să devină *expert*. El are în același timp și responsabilitatea transmiterii informațiilor asimilate, celorlalți colegi.

În cadrul acestei metode rolul profesorului este mult diminuat, el intervine semnificativ la începutul lecției când împarte elevii în grupurile de lucru și trasează sarcinile și la sfârșitul activității când va prezenta concluziile activității.

Aplicarea metodei mozaic se realizează în cinci *etape*.

1. Pregătirea materialului de studiu

Profesorul stabilește tema de studiu și o împarte în 4 sau 5 *subteme*. Realizează o *fișă-expert* în care trece cele 4 sau 5 subteme propuse și care va fi oferită fiecărui grup.

2. Organizarea colectivului în echipe de învățare de câte 4-5 elevi (în funcție de numărul lor în clasă). Fiecare elev din echipă, primește o literă (A, B, C, D) și are ca sarcină să studieze în mod independent, subtema corespunzătoare literei sale.

3. *Constituirea grupului de experți*

π

După ce au parcurs faza de lucru independent, experții cu aceeași literă se reunesc, constituind grupe de experți pentru a dezbate problema împreună.

Astfel, elevii cu litera A, părăsesc echipele de învățare inițiale și se adună la o masă pentru a aprofunda subtema din Fișa „A”. La fel procedează și ceilalți elevi cu literele B, C, și D. Dacă grupul de experți are mai mult de 6 membri, acesta se divizează în două grupe mai mici.

Faza discuțiilor în grupul de experți. Au loc discuții pe baza datelor și a materialelor avute la dispoziție, se adaugă elemente noi și se stabilește modalitatea în care noile cunoștințe vor fi transmise și celorlalți membrii din echipa inițială.

Scopul comun al fiecărui grup de experți este să se instruiască cât mai bine, având responsabilitatea propriei învățări și a predării și învățării colegilor din echipa inițială.

4. Reîntoarcerea în echipa inițială de învățare

π

Faza raportului de echipă: experții transmit cunoștințele asimilate, reținând la rândul lor cunoștințele pe care le transmit colegii lor, experți în alte subteme. Modalitatea de transmitere trebuie să fie scurtă, concisă, atractivă, putând fi însoțită de suporturi audio-vizuale, diverse materiale.

Specialiștii într-o subtemă pot demonstra o idee, citi un raport, folosi computerul, pot ilustra ideile cu ajutorul diagramelor, desenelor, fotografiilor. Membrii sunt stimulați să discute, să pună întrebări și să-și noteze, fiecare realizându-și propriul plan de idei.

5. Evaluarea

Faza demonstrației: grupele prezintă rezultatele întregii clase. În acest moment elevii sunt gata să demonstreze ce au învățat.

Profesorul poate pune întrebări, poate cere un raport sau un eseu ori poate da spre rezolvare fiecărui elev o fișă de evaluare. Dacă se recurge la evaluarea orală, atunci fiecărui elev i se va adresa o întrebare la care trebuie să răspundă fără ajutorul echipei.

Exemplul . *Aplicarea metodei mozaicului la consolidarea noțiunilor despre unghiurile înscrise în cerc*

Ca toate celelalte metode de învățare prin cooperare și aceasta presupune următoarele *avantaje*:

- stimularea încrederii în sine a elevilor;
- dezvoltarea abilităților de comunicare argumentativă și de relaționare în cadrul grupului;
- dezvoltarea gândirii logice, critice și independente;
- dezvoltarea răspunderii individuale și de grup;
- optimizarea învățării prin predarea achizițiilor altcuiva.

„Trebuie să remarcăm calitatea metodei grupurilor interdependente de a anihila manifestarea *efectului Ringelmann-denumit și lenea socială*. Interdependența dintre membri și individualizarea aportului ,fac din metoda mozaicului un remediu sigur împotriva acestui efect”

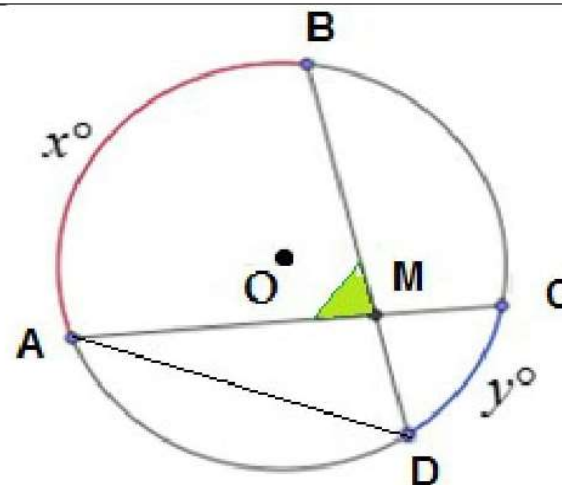
Fișa „A”. Raspundeți cerințelor următoare:

a) Demonstrați că :

$$m(\angle AMB) = \frac{1}{2} \cdot (m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$$

b) Calculați $m(\angle AMB)$, dacă $m\widehat{AB} = 100^\circ$,
 $m\widehat{CD} = 20^\circ$.

c) Calculați $m\widehat{AB}$, dacă $m(\angle AMB) = 60^\circ$
 și $m\widehat{AB}$ este cu 30° mai mare decât $m\widehat{CD}$.



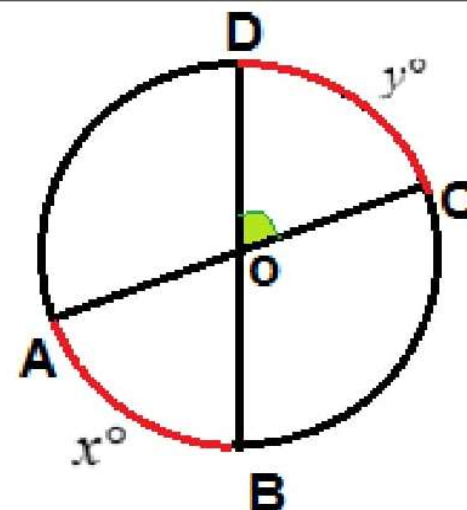
Fișa „B”. Raspundeți cerințelor următoare:

a) Demonstrați că :

$$m(\angle DOC) = \frac{1}{2} \cdot (m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$$

b) Calculați $m(\angle AOB)$, dacă $m\widehat{CB} = 60^\circ$.

c) Calculați $m\widehat{BC}$, dacă $m(\angle COD) = 60^\circ$.



Fișa „C”. Raspundeți cerințelor următoare:

a) Demonstrați că:

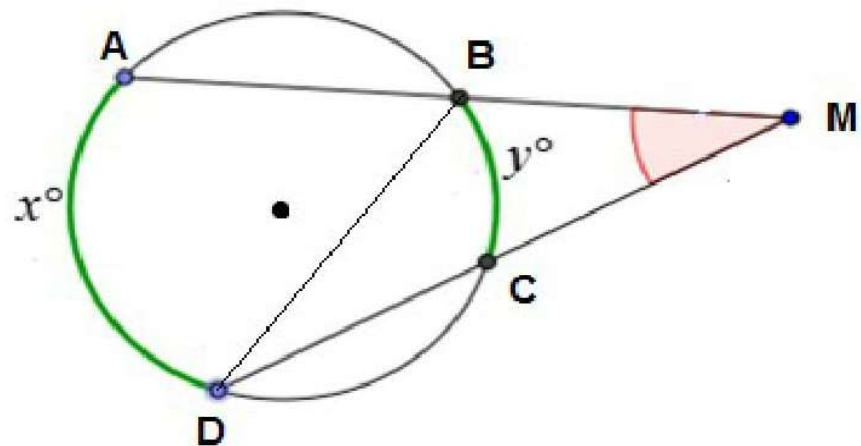
$$m(\angle AMD) = \frac{1}{2} \cdot (m\widehat{AD} - m\widehat{CB})$$

b) Calculați $m(\angle AMD)$, dacă

$$m\widehat{AB} = m\widehat{CD} = 80^\circ \text{ și } m\widehat{AD} = 120^\circ,$$

c) Calculați $m\widehat{AD}$, dacă $m(\angle AMD) = 40^\circ$

și $m\widehat{BC} = 30^\circ$.



Fișa „D”. Raspundeți cerințelor următoare:

a) Demonstrați că :

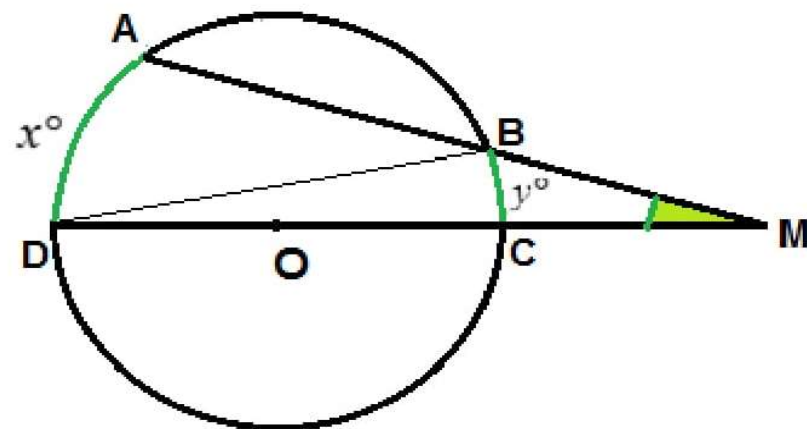
$$m(\angle AMD) = \frac{1}{2} \cdot (m\widehat{AD} - m\widehat{BC})$$

b) Calculați $m(\angle AMD)$, dacă $m\widehat{AD} = 60^\circ$

$$m\widehat{AD} = 60^\circ, m\widehat{AB} = 80^\circ, .$$

c) Calculați $m\widehat{AD}, m\widehat{BC}$, dacă $m(\angle AMD)$

$= 20^\circ$ și $m\widehat{AB} = 60^\circ$.

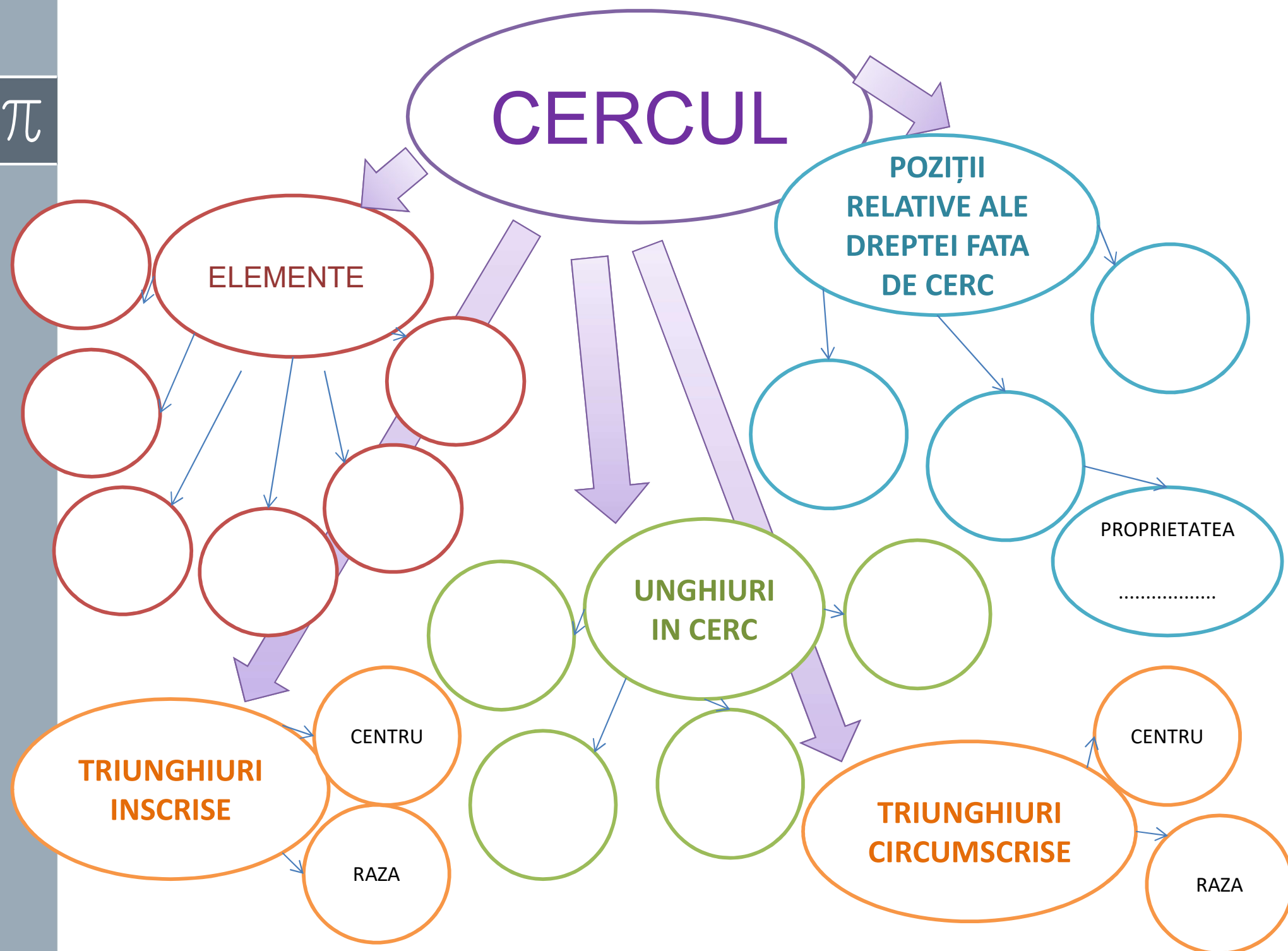


Ciorchinele

Ciorchinele este o metodă care presupune identificarea unor conexiuni logice între idei, poate fi folosită cu succes atât la începutul unei lecții pentru reactualizarea cunoștințelor predate anterior, cât și în cazul lecțiilor de sinteză, de recapitulare, de sistematizare a cunoștințelor.

- › *Ciorchinele* este o tehnică de căutare a căilor de acces spre propriile cunoștințe evidențiind modul de a înțelege o anumită temă, un anumit conținut.
- › Se scrie un cuvânt nucleu. Elevii completează ciorchinele, ținând cont de forma figurii și cuvântul nucleu. Elevii vor fi ghidați prin intermediul unor întrebări, în descoperirea informațiilor.
- › *Exemplu : Aplicarea metodei ciorchinelui la geometrie la clasa a VII-a, lecția "Cercul", lecție de recapitulare și sistematizare a cunoștințelor - în etapa de verificare a cunoștințelor anterioare .*

π



Bibliografie

1. Brânzei D., Onofraș E., Anița S., Isvoranu, Gh., *Bazele raționamentului geometric*, Editura Academiei București, 1983.
2. Brânzei D., Brânzei, R., *Metodica predării matematicii*, Editura Paralela 45, 2000.
3. Cîrjan F., *Strategii euristice în didactica matematicii*, Editura Paralela 45, 2000
4. Cuculescu I., Gaiu L., Ottescu C., *Manual*, clasa a VII-a, Editura Didactică și Pedagogică
5. Dumitru I.A. , *Dezvoltarea gândirii critice și învățarea eficientă*, Ed. de Vest, Timișoara, 2000
6. Lupu C., Săvulescu D., *Metodica predării geometriei*, Editura Paralela 45, 2000
7. *Culegere Clubul Matematicienilor*, Editura Art.
8. Radu D., Radu E., *Manual*, clasa a VII-a, Editura Teora
9. Sarivan L. coord. – *Predarea interactivă centrată pe elev*, Educația 2000+, București, 2005

**“Obiectul matematicii este
atât de serios, încât
este util să nu pierdem ocazia pentru
a-l face puțin mai distractiv.”**

(Blaise Pascal)

Vă mulțumesc pentru atenție!